Concursul interjudețean "Matematica, de drag"
Ediția a XIV-a

Clasa a IX-a

Problema 1.

Se consideră paralelogramul ABCD și fie O punctul de intersecție al diagonalelor. Bisectoarele unghiurilor $\widehat{DAC}$ și $\widehat{DBC}$ se intersectează în T. Arătați că vectorii $\overrightarrow{TD} + \overrightarrow{TC}$ și $\overrightarrow{TO}$ sunt coliniari dacă și numai dacă *ABCD* este dreptunghi.

Gazeta Matematică

Problema 2.

a) Demonstrați că pentru $x \in (0,1)$ avem $1 + \frac{x}{2} > \sqrt{1+x} > 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$.

b) Fie $N = 100 \ldots 01$ un număr natural cu 19 de zerouri. Aflați primele 12 cifre de după virgulă pentru $\sqrt{N}$

Problema 3.

Într-un disc închis de rază 1 se consideră n puncte $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Să se arate că există un punct P în disc astfel încât $\sum_{i=1}^{n} PP_i \geq n$.

Notă:

Fiecare subiect primește de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru: trei ore

Concursul interjudețean "Matematica, de drag"
Ediția a XIV-a

Clasa a X-a

Problema 1.

Fie numerele complexe z_1 și z_2 cu $|z_1| = |z_2|$. Să se arate că $|z_1 + z_2| \leq 2$ sau $|2z_1 + z_2| \geq 3$

Gazeta Matematică

Problema 2.

Determinați numerele reale x, y, z pentru care

$$2^x + 3^y = 5$$
$$3^{2y} + 5^{2z} = 34$$
$$5^{3z} + 2^{3x} = 133$$

Problema 3.

Fie z și z' două numere complexe cu proprietatea că $|z - 3i| \leq 1$ și $|z' - 4| \leq 1$. Determinați valoarea minimă și valoarea maximă a expresiei $|z - z'|$.

Notă:

Fiecare subiect primește de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru: trei ore

Concursul interjudețean "Matematica, de drag"

Ediția a XIV-a

Clasa a XI-a

Problema 1.

a) Determinați cardinalul mulțimii matricilor pătrate de ordin trei cu elemente 0 sau 1, care au exact trei zerouri.

b) Arătați că există 6 matrici distincte $A_1, A_2, \ldots, A_6$ din $\mathcal{M}_3(\{0,1\})$ cu proprietatea că pentru orice astfel de matrice, A_i, $i = 1,2,\ldots,6$ avem $A_i^n \neq A_i^m$ oricare ar fi numerele naturale distincte m, n.

Problema 2.

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale. Spunem că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ are proprietatea ***P*** dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n \geq 0$.

a) Demonstrați că orice șir cu proprietatea ***P*** are limită

b) Dați exemplu de un șir neconstant cu proprietatea ***P*** care are limita 2019.

Problema 3.

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir convergent la $a \in \mathbb{R}$. Determinați

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{1\cdot 2} + \frac{a_{n-1}}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{a_1}{n(n+1)}\right)$$

Gazeta Matematică

Notă:

Fiecare subiect primește de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru: trei ore

Concursul interjudețean "Matematica, de drag"
Ediția a XIV-a

Clasa a XII-a

Problema 1.

Să se calculeze :

a) $\int \frac{(1-x^2)arctgx}{(1+x^2)^2}dx$ b) $\int \frac{x\cdot arctg^2x}{(1+x^2)^2}dx$

Gazeta Matematică

Problema 2.

Fie $M = \{x^2 - 2xy + 3y^2 | \ x, y \in \mathbb{Z}\}$. Arătați că M este parte stabilă la înmulțirea numerelor întregi. Există elemente inversabile în M?

Problema 3.

Să se determine funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care au primitive și verifică relația:

$$(xf(x) - 2F(x))(F(x) - x^2) = 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

unde F este o primitivă a lui f.

Notă:

Fiecare subiect primește de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru: trei ore